第 2 章

导数与微分

一、基 本 内 容

1. 导数的概念

   (1) 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的导数;

   (2) 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数;

   (3) 函数 $y = f(x)$ 在开区间 I 内可导.

2. 导数的几何意义

3. 导数的物理意义

4. 函数的可导性与连续性之间的关系

   (1) 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导, 则函数在该点必连续;

   (2) 函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件, 但不是充分条件.

5. 基本求导公式（常数和基本初等函数的导数）

6. 基本求导法则

   (1) 函数的和、差、积、商的求导法则;

   (2) 反函数的求导法则;

   (3) 复合函数的求导法则.

7. 高阶导数

8. 隐函数及由参数方程所确定的函数的微分法

9. 微分的概念

   (1) 函数在某点可微的定义;

   (2) 函数在某点的微分与导数的关系;

   (3) 函数在某点的改变量 Δy 与微分 $\mathrm{d}y$ 的关系;

   (4) 函数在某区间内可微的定义.

10. 基本微分公式（常数和基本初等函数的微分）

11. 基本微分法则

    (1) 函数的和、差、积、商的微分法则;

    (2) 复合函数的微分法则.

12. 函数在某点微分的几何意义

13. 微分的应用

    (1) 近似计算;

    *(2) 误差估计.

二、基 本 要 求

1. 理解导数的概念，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量，理解函数的可导性与连续性之间的关系.
2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式.
3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.
4. 会求分段函数的导数，会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.
5. 理解微分的概念，理解导数与微分的关系.
6. 了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.
7. 理解微分在近似计算中的应用.

三、习 题 解 答

习题 2-1

1. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔 $[0,t]$ 内转过角度 θ，从而转角 θ 是 t 的函数：$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的，那么称 $\omega=\dfrac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非均匀的，应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度?

解 当时间由 t_0 变为 $t_0+\Delta t$ 时，物体旋转的转角相应地由 $\theta(t_0)$ 变为 $\theta(t_0+\Delta t)$，这段时间内物体旋转的平均角速度为

$$\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t},$$

如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}$$

存在，此极限称为物体在时刻 t_0 的角速度，即物体在时刻 t_0 的角速度为 $\theta'(t_0)$.

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却. 若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度?

解 当时间由 t 变为 $t+\Delta t$ 时，物体的温度相应地由 $T(t)$ 变为 $T(t+\Delta t)$，这段时间内物体的平均冷却速度为

$$\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t},$$

如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}$$

存在，此极限称为物体在时刻 t 的冷却速度，即物体在时刻 t 的冷却速度为 $T'(t)$.

3. 设某工厂生产 x 件产品的成本为 $C(x)=2000+100x-0.1x^2$（元），函数 $C(x)$ 称为成本函数，成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$ 在经济学中称为边际成本. 试求:

(1) 当生产100件产品时的边际成本;

(2) 生产第101件产品时的成本，并与(1)中求得的边际成本做比较，说明边际成本的实际意义.

解 (1) 边际成本为

$$C'(x)=100-0.2x.$$

生产100件产品时的边际成本为

$$C'(100)=100-0.2\cdot 100=80 \text{（元/件）}.$$

(2) 生产第101件产品时的成本为

$$C(101)-C(100)=(2000+100\cdot 101-0.1\cdot 101^2)-(2000+100\cdot 100-0.1\cdot 100^2)=79.9 \text{（元）}.$$

边际成本的实际意义：生产 x 件产品时的边际成本，可以解析为生产 x 件产品后，再生产一件产品的成本.

4. 设 $f(x)=10x^2$，试按定义求 $f'(-1)$.

解 由导数的定义得

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{10x^2-10\cdot(-1)^2}{x+1}=\lim_{x\to -1}10(x-1)=-20.$$

5. 证明 $(\cos x)'=-\sin x$.

证明 令 $f(x)=\cos x$，则

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\Delta x},\\ &=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x \end{aligned}$$

即 $(\cos x)'=-\sin x$.

6. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

解 (1) $A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-1)\cdot\dfrac{f\left[x_0+(-\Delta x)\right]-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(2) $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

(3) $A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f[x_0+(-h)]-f(x_0)}{-h}\right\}$$

$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$$

以下两题中给出了四个结论，从中选择一个正确的结论.

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\leqslant 1,\\ x^2,\quad x>1.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的(　　).

A. 左、右导数都存在　　B. 左导数存在，右导数不存在

C. 左导数不存在，右导数存在　　D. 左、右导数都不存在

解　B.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty .$$

8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)\left(1+|\sin x|\right)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　　).

A. 充分必要条件　　B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

解　A.

$$F_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)-f(0),$$

$$F_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+f(0),$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件为 $F_+'(0)=F_-'(0)$，即 $f(0)=0$.

9. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^4$;　(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$;　(3) $y=x^{1.6}$;　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

(5) $y=\dfrac{1}{x^2}$;　(6) $y=x^3\cdot\sqrt[5]{x}$;　(7) $y=\dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

解 (1) $y'=4x^3$.

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$.

当 $x\neq0$ 时, $y'=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; 当 $x=0$ 时, $y'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=\infty$.

函数在 $x=0$ 处不可导.

(3) $y'=1.6x^{0.6}$.

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$, $y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(5) $y=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$, $y'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$.

(6) $y=x^3\cdot\sqrt[5]{x}=x^{\frac{16}{5}}$, $y'=\dfrac{16}{5}x^{\frac{16}{5}-1}=\dfrac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y=\dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}=x^{\frac{1}{6}}$, $y'=\dfrac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1}=\dfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

10. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$ m, 求该物体在 $t=2$ s 时的速度.

解 $s'=3t^2$, 物体在 $t=2$ s 时的速度为 $s'|_{t=2}=3\times2^2=12$ m/s.

11. 如果 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 证明 $f'(0)=0$.

解 因为

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x},$$

$f(x)$ 为偶函数, $f(\Delta x)=f(-\Delta x)$,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}-\frac{f\left[0+(-\Delta x)\right]-f(0)}{-\Delta x}=-f'(0),$$

所以 $f'(0)=0$.

12. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率: $x=\dfrac{2}{3}\pi$; $x=\pi$.

解 因为 $y'=\cos x$, 所以切线的斜率分别为

$$y'|_{x=\frac{2}{3}\pi}=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2};\quad y'|_{x=\pi}=\cos\pi=-1.$$

13. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y' = -\sin x$，所以切线斜率为 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因而切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + y - \dfrac{1}{6}\left(3 + \sqrt{3}\pi\right) = 0$. 法线斜率为 $-\dfrac{1}{y'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$，法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

即 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x - y + \dfrac{1}{18}(9 - 4\sqrt{3}\pi) = 0$.

14. 求曲线 $y = e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解 因为 $y' = e^x$，所以切线斜率为 $y'\big|_{x=0} = 1$，因而切线方程为 $y - 1 = 1\cdot(x - 0)$，即

$$x - y + 1 = 0.$$

15. 在抛物线 $y = x^2$ 上取横坐标为 $x_1 = 1$ 及 $x_2 = 3$ 的两点，作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解 $y' = 2x$, $y\big|_{x=1} = 1$, $y\big|_{x=3} = 9$，由题意得

$$2x = \frac{9-1}{3-1},$$

所以 $x = 2$. 又 $y\big|_{x=2} = 4$，因而所求点坐标为 $(2,4)$.

16. 讨论下列函数在 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

(1) $y = |\sin x|$；(2) $y = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解 (1)令 $y = f(x)$，则

$$f_-'(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x} = -1,$$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

因为 $f_+'(0) \neq f_-'(0)$，所以函数在 $x = 0$ 处不可导；又

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-}(-\sin x) = 0,$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+}(\sin x) = 0,$$

$$f(0^-) = f(0^+) = f(0),$$

所以函数在 $x = 0$ 处连续.

(2) 令 $y = f(x)$，则

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$. 故函数在 $x = 0$ 处可导，因而连续.

17. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a 和 b 应取什么值?

解 $f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$，$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$，由函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处连续，得

$$f(1^-)=f(1^+)=f(1),$$

即 $a+b=1$．又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(ax+b)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(ax+b)-(a+b)}{x-1}=a,$$

由函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，得

$$f'_-(1)=f'_+(1),$$

即 $a=2$，所以 $b=-1$．

18. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在?

解 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，

由于 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，因而 $f'(0)$ 不存在.

19. 已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 当 $x<0$ 时，$f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x$，当 $x>0$ 时，$f(x)=x$，$f'(x)=1$．
当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=f'_-(0),$$

所以 $f'(0)=1$．因而 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

20. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$．

证明 $y'=-\dfrac{a^2}{x^2}$，$y'\big|_{x=x_0}=-\dfrac{a^2}{x_0^2}$．

双曲线 $xy=a^2$ 上任一点 x_0 处的切线方程为

$$y-\frac{a^2}{x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0).$$

当 $y=0$ 时，$x=2x_0$；当 $x=0$ 时，$y=\frac{2a^2}{x_0}$. 即切线在两坐标轴上的截距分别为 $2x_0$，$\frac{2a^2}{x_0}$.

因而切线与两坐标轴构成的三角形的面积为 $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot|2x_0|\cdot\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|=2a^2$.

习题 2-2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式：$(\cot x)'=-\csc^2 x$，$(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

解 $(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{(-\sin x)\sin x-\cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$

$=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$，

即 $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{(1)'\sin x-1\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{0\cdot\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=-\csc x\cot x$，

即 $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^3+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12$；　(2) $y=5x^3-2^x+3\mathrm{e}^x$；　(3) $y=2\tan x+\sec x-1$；

(4) $y=\sin x\cdot\cos x$；　(5) $y=x^2\ln x$；　(6) $y=3\mathrm{e}^x\cos x$；　(7) $y=\frac{\ln x}{x}$；

(8) $y=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}+\ln 3$；　(9) $y=x^2\ln x\cos x$；　(10) $s=\frac{1+\sin t}{1+\cos t}$.

解 (1) $y'=(x^3)'+(7x^{-4})'-(2x^{-1})'+(12)'=3x^2+7(-4)x^{-5}-2(-1)x^{-2}+0=3x^2-\frac{28}{x^5}+\frac{2}{x^2}$.

(2) $y'=(5x^3)'-(2^x)'+(3\mathrm{e}^x)'=5\cdot3x^2-2^x\ln 2+3\mathrm{e}^x=15x^2-2^x\ln 2+3\mathrm{e}^x$.

(3) $y'=(2\tan x)'+(\sec x)'-(1)'=2\sec^2 x+\sec x\tan x-0=\sec x(2\sec x+\tan x)$.

(4) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)=\cos 2x$.

(5) $y'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(1+2\ln x)$.

(6) $y'=(3\mathrm{e}^x)'\cos x+3\mathrm{e}^x(\cos x)'=3\mathrm{e}^x\cos x+3\mathrm{e}^x(-\sin x)=3\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$.

(7) $y'=(x^{-1}\ln x)'=(x^{-1})'\ln x+x^{-1}(\ln x)'=-x^{-2}\ln x+x^{-1}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(8) $y'=(x^{-2}\mathrm{e}^x+\ln 3)'=(x^{-2})'\mathrm{e}^x+x^{-2}(\mathrm{e}^x)'+(\ln 3)'=-2x^{-3}\mathrm{e}^x+x^{-2}\mathrm{e}^x+0=\frac{\mathrm{e}^x(x-2)}{x^3}$.

(9) $y'=(x^2\ln x)'\cos x+x^2\ln x(\cos x)'=[(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)']\cos x+x^2\ln x(-\sin x)$

$$=\left(2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}\right)\cos x-x^2\ln x\sin x=(2x\ln x+x)\cos x-x^2\ln x\sin x.$$

(10) $s'=\dfrac{(1+\sin t)'(1+\cos t)-(1+\sin t)(1+\cos t)'}{(1+\cos t)^2}=\dfrac{(0+\cos t)(1+\cos t)-(1+\sin t)(0-\sin t)}{(1+\cos t)^2}$

$$=\frac{\cos t+\sin t+1}{(1+\cos t)^2}.$$

3. 求下列函数在给定点处的导数.

(1) $y=\sin x-\cos x$，求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$；

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$；

(3) $f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

解 (1) $y'=(\sin x)'-(\cos x)'=\cos x+\sin x$，$y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$；

$$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=(\theta\sin\theta)'+\left(\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)'=(\theta)'\sin\theta+\theta(\sin\theta)'+\dfrac{1}{2}(-\sin\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta$，

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8}(2+\pi).$$

(3) $f'(x)=\dfrac{(3)'(5-x)-3(5-x)'}{(5-x)^2}+\dfrac{1}{5}(x^2)'=\dfrac{0\cdot(5-x)-3(0-1)}{(5-x)^2}+\dfrac{1}{5}\cdot 2x=\dfrac{3}{(5-x)^2}+\dfrac{2x}{5}$，

$$f'(0)=\frac{3}{(5-0)^2}+\frac{2\cdot 0}{5}=\frac{3}{25};\quad f'(2)=\frac{3}{(5-2)^2}+\frac{2\cdot 2}{5}=\frac{17}{15}.$$

4. 以初速度 v_0 竖直上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$. 求:

(1) 该物体的速度 $v(t)$；(2) 该物体达到最高点的时刻.

解 (1) $v(t)=s'=(v_0t)'-\left(\dfrac{1}{2}gt^2\right)'=v_0\cdot 1-\dfrac{1}{2}g\cdot 2t=v_0-gt$.

(2) 设 t_0 时刻物体达到最高点, 则 $v(t_0)=0$，即 $v_0-gt_0=0$，所以 $t_0=\dfrac{v_0}{g}$.

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 $y'=(2\sin x)'+(x^2)'=2\cos x+2x=2(\cos x+x)$.

所求切线斜率为 $k_1=y'\big|_{x=0}=2(\cos 0+0)=2$，又 $y\big|_{x=0}=2\sin 0+0^2=0$，所以切点为 $(0,0)$，所求切线方程为 $y-0=2(x-0)$，即 $2x-y=0$. 所求法线斜率为 $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-\dfrac{1}{2}$，所求法线方

程为

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-0),$$

即 $x+2y=0$.

6. 求下列函数的导数.

(1) $y=(2x+5)^4$; (2) $y=\cos(4-3x)$; (3) $y=\mathrm{e}^{-3x^2}$; (4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2 x$; (6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$; (7) $y=\tan x^2$;

(8) $y=\arctan(\mathrm{e}^x)$; (9) $y=(\arcsin x)^2$; (10) $y=\ln\cos x$.

解 (1) $y'=4(2x+5)^3\cdot(2x+5)'=4(2x+5)^3\cdot(2+0)=8(2x+5)^3$.

(2) $y'=-\sin(4-3x)\cdot(4-3x)'=-\sin(4-3x)\cdot(0-3)=3\sin(4-3x)$.

(3) $y'=\mathrm{e}^{-3x^2}\cdot(-3x^2)'=\mathrm{e}^{-3x^2}\cdot(-3\cdot 2x)=-6x\mathrm{e}^{-3x^2}$.

(4) $y'=\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\frac{1}{1+x^2}\cdot(0+2x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

(6) $y'=[(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^2-x^2)'=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(0-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(7) $y'=\sec^2 x^2\cdot(x^2)'=\sec^2 x^2\cdot(2x)=2x\sec^2 x^2$.

(8) $y'=\frac{1}{1+(\mathrm{e}^x)^2}\cdot(\mathrm{e}^x)'=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\cdot\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

(9) $y'=2\arcsin x\cdot(\arcsin x)'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(10) $y'=\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-\tan x$.

7. 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin(1-2x)$; (2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (3) $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$; (4) $y=\arccos\frac{1}{x}$;

(5) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$; (6) $y=\frac{\sin 2x}{x}$; (7) $y=\arcsin\sqrt{x}$; (8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$; (10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

解 (1) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(1-2x)'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(0-2)=-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $y'=[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-x^2)'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(0-2x)=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $y'=(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})'\cos 3x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x)'=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{x}{2}\right)'\cos 3x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(-\sin 3x)(3x)'$

$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x)$.

(4) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\cdot(-x^{-2})=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

(5) $y'=\dfrac{(1-\ln x)'(1+\ln x)-(1-\ln x)(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}=\dfrac{\left(0-\dfrac{1}{x}\right)(1+\ln x)-(1-\ln x)\left(0+\dfrac{1}{x}\right)}{(1+\ln x)^2}$

$=-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

(6) $y'=\dfrac{(\sin 2x)'x-\sin 2x(x)'}{x^2}=\dfrac{\cos 2x(2x)'x-\sin 2x}{x^2}=\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$.

(7) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot(x+\sqrt{a^2+x^2})'=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2+x^2)'\right]$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(0+2x)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(9) $y'=\dfrac{1}{\sec x+\tan x}\cdot(\sec x+\tan x)'=\dfrac{1}{\sec x+\tan x}\cdot(\sec x\tan x+\sec^2 x)=\sec x$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\csc x-\cot x}\cdot\left(\csc x-\cot x\right)'=\dfrac{1}{\csc x-\cot x}\cdot\left[-\csc x\cot x-(-\csc x)^2\right]=\csc x$.

8. 求下列函数的导数.

(1) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$； (2) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$； (3) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$； (4) $y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$；

(5) $y=\sin^n x\cos nx$； (6) $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$； (7) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$； (8) $y=\ln\ln\ln x$；

(9) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$； (10) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) $y'=2\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)'=2\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)'$

$=2\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\arcsin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$.

(2) $y'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin x}=\csc x$.

(3) $y'=\dfrac{1}{2}(1+\ln^2 x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+\ln^2 x)'=\dfrac{1}{2}(1+\ln^2 x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[0+2\ln x(\ln x)'\right]$

$$=\frac{1}{2}(1+\ln^2 x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$$

(4) $y'=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\cdot(\arctan\sqrt{x})'=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

(5) $y'=(\sin^n x)'\cos nx+\sin^n x(\cos nx)'=n\sin^{n-1}x\cdot(\sin x)'\cos nx+\sin^n x(-\sin nx)\cdot(nx)'$

$$=n\sin^{n-1}x\cdot\cos x\cos nx+\sin^n x(-\sin nx)\cdot n=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x.$$

(6) $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}\cdot\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$$=\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}\cdot\frac{(1+0)(x-1)-(x+1)(1-0)}{(x-1)^2}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(7) $y'=\frac{(\arcsin x)'\arccos x-\arcsin x(\arccos x)'}{(\arccos x)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-\arcsin x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos x)^2}$

$$=\frac{\arccos x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}.$$

(8) $y'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot(\ln\ln x)'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)}$.

(9) $y'=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})'(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})'}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot(1+x)'-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(1-x)'\right](\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$-\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot(1+x)'+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(1-x)'\right]}{2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot(0+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(0-1)\right](\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$-\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot(0+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(0-1)\right]}{2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}.$$

或

$$y'=\left[\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}\right]'=\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'$$

$$=\frac{(1-\sqrt{1-x^2})'x-(1-\sqrt{1-x^2})(x)'}{x^2}=\frac{\left[0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'\right]x-(1-\sqrt{1-x^2})\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(0-2x)x-1+\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

(10) $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'=\sqrt{\frac{1+x}{2x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$$

$$=\frac{|1+x|}{2\sqrt{2x(1-x)}}\cdot\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}=\frac{|1+x|}{2\sqrt{2x(1-x)}}\cdot\frac{(0-1)(1+x)-(1-x)(0+1)}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{|1+x|\sqrt{2x(1-x)}}=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解 $$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot\left[f^2(x)+g^2(x)\right]'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot\left[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)\right]=\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

10. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$： (1) $y=f(x^2)$；(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)$.

(2) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(\sin^2 x)\cdot(\sin^2 x)'+f'(\cos^2 x)\cdot(\cos^2 x)'$$

$$=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'+f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot(\cos x)'$$

$$=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x+f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)$$

$$=\sin 2x\left[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right].$$

11. 求下列函数的导数.

(1) $y=\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+3)$； (2) $y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2)$； (3) $y=\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2$； (4) $y=\frac{\ln x}{x^n}$；

(5) $y=\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$； (6) $y=\ln\cos\frac{1}{x}$； (7) $y=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}$；

(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$； (9) $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$； (10) $y=\arcsin\frac{2t}{1+t^2}$.

解 (1) $y'=(\mathrm{e}^{-x})'(x^2-2x+3)+\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+3)'$

$$= e^{-x}(-x)'(x^2-2x+3)+e^{-x}(2x-2+0)$$
$$= e^{-x}(-1)(x^2-2x+3)+e^{-x}(2x-2)$$
$$= (-x^2+4x-5)e^{-x}.$$

(2) $y' = (\sin^2 x)'\sin(x^2)+\sin^2 x\cdot\left[\sin(x^2)\right]'$

$$= 2\sin x(\sin x)'\sin(x^2)+\sin^2 x\cdot\cos(x^2)\cdot(x^2)'$$
$$= 2\sin x\cos x\sin(x^2)+\sin^2 x\cdot\cos(x^2)\cdot 2x$$
$$= \sin 2x\cdot\sin(x^2)+2x\sin^2 x\cdot\cos(x^2).$$

(3) $y' = 2\arctan\dfrac{x}{2}\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)' = 2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)'$

$$= 2\arctan\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{4+x^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{4+x^2}\cdot\arctan\frac{x}{2}.$$

(4) $y' = (x^{-n}\ln x)' = (x^{-n})'\ln x+x^{-n}(\ln x)' = -nx^{-n-1}\ln x+x^{-n}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}.$

(5) $y' = \dfrac{(e^t-e^{-t})'(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})'}{(e^t+e^{-t})^2}$

$$= \frac{[e^t-e^{-t}(-t)'](e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})[e^t+e^{-t}(-t)']}{(e^t+e^{-t})^2}$$
$$= \frac{[e^t-e^{-t}(-1)](e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})[e^t+e^{-t}(-1)]}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

或 $y' = (\mathrm{th}t)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}$.

(6) $y' = \dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}\cdot\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\tan\dfrac{1}{x}\cdot(-x^{-2}) = \dfrac{1}{x^2}\cdot\tan\dfrac{1}{x}.$

(7) $y' = e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\left(-\sin^2\dfrac{1}{x}\right)' = e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)'$

$$= e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})$$
$$= \frac{1}{x^2}\cdot e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{2}{x}.$$

(8) $y' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot(x+\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}.$

(9) $y' = (x)'\arcsin\dfrac{x}{2}+x\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)'+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot(4-x^2)'$

$$= \arcsin\frac{x}{2}+x\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}\left(\frac{x}{2}\right)'+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot(0-2x)$$

$$=\arcsin\frac{x}{2}+\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}.$$

(10) $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)'=\frac{1+t^2}{\left|1-t^2\right|}\cdot 2\cdot\frac{(t)'(1+t^2)-t(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}$$

$$=\frac{1+t^2}{\left|1-t^2\right|}\cdot 2\cdot\frac{(1+t^2)-t(0+2t)}{(1+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{\left|1-t^2\right|}\cdot\frac{2}{1+t^2}=\begin{cases}\dfrac{2}{1+t^2}, & |t|<1,\\ -\dfrac{2}{1+t^2}, & |t|>1.\end{cases}$$

* **12.** 求下列函数的导数.

(1) $y=\mathrm{ch}(\mathrm{sh}x)$; (2) $y=\mathrm{sh}x\cdot e^{\mathrm{ch}x}$; (3) $y=\mathrm{th}(\ln x)$; (4) $y=\mathrm{sh}^3x+\mathrm{ch}^2x$;

(5) $y=\mathrm{th}(1-x^2)$; (6) $y=\mathrm{arsh}(x^2+1)$; (7) $y=\mathrm{arch}(e^{2x})$; (8) $y=\arctan(\mathrm{th}x)$;

(9) $y=\ln\mathrm{ch}x+\dfrac{1}{2\mathrm{ch}^2x}$; (10) $y=\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

解 (1) $y'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}x)\cdot(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}x)\cdot\mathrm{ch}x$.

(2) $$y'=(\mathrm{sh}x)'\cdot e^{\mathrm{ch}x}+\mathrm{sh}x\cdot(e^{\mathrm{ch}x})'=\mathrm{ch}x\cdot e^{\mathrm{ch}x}+\mathrm{sh}x\cdot e^{\mathrm{ch}x}\cdot(\mathrm{ch}x)'$$
$$=\mathrm{ch}x\cdot e^{\mathrm{ch}x}+\mathrm{sh}x\cdot e^{\mathrm{ch}x}\cdot\mathrm{sh}x=e^{\mathrm{ch}x}(\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}^2x).$$

(3) $$y'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln x)}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln x)}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\mathrm{ch}^2(\ln x)}.$$

(4) $$y'=3\mathrm{sh}^2x\cdot(\mathrm{sh}x)'+2\mathrm{ch}x\cdot(\mathrm{ch}x)'=3\mathrm{sh}^2x\cdot\mathrm{ch}x+2\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}\mathrm{sh}2x\cdot(3\mathrm{sh}x+2).$$

(5) $$y'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}\cdot(1-x^2)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}\cdot(0-2x)=-\frac{2x}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}.$$

(6) $$y'=\frac{1}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}}\cdot(1+x^2)'=\frac{1}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}}\cdot(0+2x)=\frac{2x}{\sqrt{2+2x^2+x^4}}.$$

(7) $$y'=\frac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}\cdot(e^{2x})'=\frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}\cdot e^{2x}\cdot(2x)'=\frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}\cdot e^{2x}\cdot 2=\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}.$$

(8) $$y'=\frac{1}{1+(\mathrm{th}x)^2}\cdot(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{1+(\mathrm{th}x)^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x}=\frac{1}{\mathrm{ch}2x}.$$

(9) $$y'=\frac{1}{\mathrm{ch}x}\cdot(\mathrm{ch}x)'+\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\mathrm{ch}^{-3}x\cdot(\mathrm{ch}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}x}\cdot\mathrm{sh}x-\mathrm{ch}^{-3}x\cdot\mathrm{sh}x=\mathrm{th}x\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}\right)=\mathrm{th}^3x.$$

(10) $$y'=2\mathrm{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left[\mathrm{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]'=2\mathrm{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\mathrm{sh}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$
$$=\mathrm{sh}\left(2\cdot\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\mathrm{sh}\left(2\cdot\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{(1-0)(x+1)-(x-1)(1+0)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2}{(x+1)^2}\cdot\mathrm{sh}\left(2\cdot\frac{x-1}{x+1}\right).$$

13. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 处可导，$f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

解 令 $F(x)=f(x)g(x)$，则

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)=f'(x_0)\cdot g(x_0)$$

即函数 $f(x)g(x)$ 在 x_0 点可导.

14. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) $f(x+y)=f(x)f(y)$，对一切 $x,y\in R$；

(2) $f(x)=1+xg(x)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

试证明 $f(x)$ 在 R 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$.

证明 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

由(1)知 $f(x+\Delta x)=f(x)f(\Delta x)$，所以

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x},$$

由(2)知，$f(\Delta x)=1+\Delta xg(\Delta x)$，因而

$$f'(x)=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta xg(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}g(\Delta x),$$

由(2)知，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}g\left(\Delta x\right)=1$，所以 $f'(x)=f(x)\cdot 1=f(x)$.

习题 2-3

1. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=2x^2+\ln x$；　(2) $y=\mathrm{e}^{2x-1}$；　(3) $y=x\cos x$；　(4) $y=\mathrm{e}^{-t}\sin t$；

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；　(6) $y=\ln(1-x^2)$；　(7) $y=\tan x$；　(8) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$；

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$；　(10) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$；　(11) $y=x\mathrm{e}^{x^2}$；　(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y'=2\cdot 2x+\dfrac{1}{x}=4x+\dfrac{1}{x}$，$y''=4+(-x^{-2})=4-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y'=\mathrm{e}^{2x-1}(2x-1)'=2\mathrm{e}^{2x-1}$，$y''=2\cdot\mathrm{e}^{2x-1}(2x-1)'=4\mathrm{e}^{2x-1}$.

(3) $y'=(x)'\cos x+x(\cos x)'=\cos x-x\sin x$,

$$y''=-\sin x-[(x)'\sin x+x(\sin x)']=-\sin x-(\sin x+x\cos x)=-2\sin x-x\cos x.$$

(4) $y'=(\mathrm{e}^{-t})'\sin t+\mathrm{e}^{-t}(\sin t)'=-\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t=\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)$,

$$y''=(\mathrm{e}^{-t})'(\cos t-\sin t)+\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)'$$

$$=-e^{-t}(\cos t-\sin t)+e^{-t}(-\sin t-\cos t)=-2e^{-t}\cos t.$$

(5) $y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(0-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$y''=-\frac{(x)'\sqrt{a^2-x^2}-x(\sqrt{a^2-x^2})'}{(\sqrt{a^2-x^2})^2}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'}{a^2-x^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(0-2x)}{a^2-x^2}=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(6) $y'=\frac{1}{1-x^2}\cdot(1-x^2)'=\frac{1}{1-x^2}\cdot(0-2x)=-\frac{2x}{1-x^2}$,

$$y''=-2\cdot\frac{(x)'(1-x^2)-x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=-2\cdot\frac{(1-x^2)-x(0-2x)}{(1-x^2)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

(7) $y'=\sec^2 x$, $y''=2\sec x(\sec x)'=2\sec x\cdot\sec x\tan x=2\sec^2 x\tan x$.

(8) $y'=-1\cdot(x^3+1)^{-2}\cdot(x^3+1)'=-1\cdot(x^3+1)^{-2}\cdot(3x^2+0)=-3x^2(x^3+1)^{-2}$,

$$y''=-3\left\{(x^2)'(x^3+1)^{-2}+x^2\left[(x^3+1)^{-2}\right]'\right\}=-3\left\{2x(x^3+1)^{-2}+x^2\left[-2(x^3+1)^{-3}(x^3+1)'\right]\right\}$$

$$=-3\left[2x(x^3+1)^{-2}-2x^2(x^3+1)^{-3}(3x^2+0)\right]=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

(9) $y'=(1+x^2)'\arctan x+(1+x^2)(\arctan x)'=(0+2x)\arctan x+(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}=1+2x\arctan x$,

$$y''=(1)'+(2x)'\arctan x+2x\cdot(\arctan x)'=2\arctan x+2x\cdot\frac{1}{1+x^2}=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

(10) $y'=(x^{-1})'e^x+x^{-1}(e^x)'=(-x^{-2})e^x+x^{-1}e^x=(x^{-1}-x^{-2})e^x$,

$$y''=(x^{-1}-x^{-2})'e^x+(x^{-1}-x^{-2})(e^x)'=\left[-x^{-2}-(-2x^{-3})\right]e^x+(x^{-1}-x^{-2})e^x=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

(11) $y'=(x)'e^{x^2}+x(e^{x^2})'=e^{x^2}+xe^{x^2}(x^2)'=e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x=e^{x^2}(1+2x^2)$,

$$y''=(1+2x^2)'e^{x^2}+(1+2x^2)(e^{x^2})'=(0+4x)e^{x^2}+(1+2x^2)\cdot e^{x^2}\cdot(x^2)'$$

$$=4xe^{x^2}+(1+2x^2)\cdot e^{x^2}\cdot 2x=2x(3+2x^2)e^{x^2}.$$

(12) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right]$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(0+2x)\right]=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y''=-\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1+x^2)'=-\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(0+2x)=-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$，求 $f'''(2)$.

解　$f'(x)=6(x+10)^5(x+10)'=6(x+10)^5$，$f''(x)=6\cdot 5(x+10)^4(x+10)'=30(x+10)^4$，

$$f'''(x)=30\cdot 4(x+10)^3(x+10)'=120(x+10)^3,\quad f'''(2)=120(2+10)^3=207360.$$

3. 设 $f''(x)$ 存在，求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：(1) $y=f(x^2)$；(2) $y=\ln[f(x)]$.

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2[1\cdot f'(x^2)+x\cdot f''(x^2)\cdot(x^2)']=2[f'(x^2)+x\cdot f''(x^2)\cdot 2x]=2[f'(x^2)+2x^2\cdot f''(x^2)].$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{f''(x)\cdot f(x)-f'(x)\cdot f'(x)}{[f(x)]^2}=\dfrac{f''(x)\cdot f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$.

4. 试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出：

(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；　　(2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解 (1) $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$，

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=\left[-(y')^{-2}\cdot\frac{d}{dx}(y')\right]\cdot\frac{1}{y'}=\left[-(y')^{-2}\cdot y''\right]\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

(2)
$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}\left[-\frac{y''}{(y')^3}\right]=\frac{d}{dx}\left[-\frac{y''}{(y')^3}\right]\cdot\frac{dx}{dy}=\left[-\frac{\frac{d}{dx}(y'')\cdot(y')^3-y''\cdot 3(y')^2\cdot\frac{d}{dx}(y')}{(y')^6}\right]\cdot\frac{1}{y'}$$

$$=\left[-\frac{y'''\cdot(y')^3-y''\cdot 3(y')^2\cdot y''}{(y')^6}\right]\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$（A 和 ω 是常数），求物体运动的加速度，并验证 $\dfrac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0$.

解 物体运动的速度为

$$\frac{ds}{dt}=A\cdot\cos\omega t\cdot\omega=A\omega\cos\omega t,$$

物体运动的加速度为

$$\frac{d^2s}{dt^2}=A\omega\cdot(-\sin\omega t)\cdot\omega=-A\omega^2\sin\omega t=-\omega^2 s.$$

因而 $\dfrac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0$.

6. 密度大的陨星进入大气层时，当它离地心为 s km 时的速度与 $\sqrt{s}$ 成反比. 试证陨星的加速度与 s^2 成反比.