第1章 行 列 式

线性代数是中学代数的继续和提高，而行列式是研究线性代数的基础工具，也是线性代数的一个重要概念，它广泛应用于数学、工程技术及经济等众多领域.

本章主要介绍n阶行列式的定义、性质及其计算方法．此外还要介绍用n阶行列式求解n元线性方程组的克拉默（Cramer）法则.

1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

为消去未知数x_2，以a_{22}与a_{12}分别乘以上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地，消去x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，求得方程组(1.1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)中的分子、分母都是4个数分两对相乘再相减而得．其中分母$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$是由方程组(1.1.1)中的4个系数确定的，把这4个数按它们在方程组(1.1.1)中的位置，排成两行两列（横排称为**行**、竖排称为**列**）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}, \tag{1.1.3}$$

表达式$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$称为数表(1.1.3)所确定的**二阶行列式**，并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.1.4}$$

数 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.1.4)的**元素**或**元**．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列．位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1.1.4)的 (i,j) **元**．

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆．参看图 1.1.1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差．

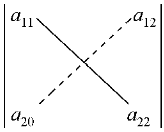

图 1.1.1

例 1.1.1 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$．

解： $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2-(-1)\times 1 = 7$．

例 1.1.2 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$，问 λ 为何值时 $D\neq 0$？

解： $D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda-2\lambda^2=\lambda(1-2\lambda)$，令 $D\neq 0$，则 $\lambda\neq 0$ 或 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$，故当 $\lambda\neq 0$ 或 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ 时，$D\neq 0$．

利用二阶行列式的概念，式(1.1.2)中 x_1，x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么式(1.1.2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意，这里的分母 D 是由方程组(1.1.1)的系数所确定的二阶行列式（称为系数行列式），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式．

例 1.1.3 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

解：由于

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\2 & 1\end{vmatrix}=3\times1-(-2)\times2=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}12 & -2\\1 & 1\end{vmatrix}=12\times1-(-2)\times1=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 12\\2 & 1\end{vmatrix}=3\times1-12\times2=-21,$$

因此
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

1.1.2　三阶行列式

类似地，可以定义三阶行列式.

设有 9 个数排成三行三列的数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\tag{1.1.5}$$

记

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},\tag{1.1.6}$$

式 (1.1.6) 称为数表 (1.1.5) 所确定的**三阶行列式**.

上述定义表明三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循如图 1.1.2 所示的对角形法则：图中三条实线可视为平行于主对角线的连线，三条虚线可视为平行于副对角线的连线，实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素的乘积冠负号.

例 1.1.4　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\-1 & 0 & 3\\2 & 1 & 5\end{vmatrix}.$$

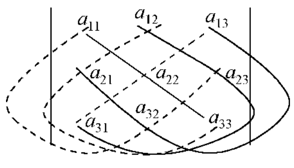

图 1.1.2

解：按对角线法则，有

$$\begin{aligned}D&=1\times0\times5+3\times3\times2+2\times(-1)\times1-2\times0\times2-3\times(-1)\times5-1\times3\times1\\&=0+18-2-0+15-3=28.\end{aligned}$$

例 1.1.5 求解方程

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0.$$

解： 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned}D&=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12\\&=x^2-5x+6\end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，四阶及更高阶行列式可用其他方法来计算.

1.2 排列及其性质

在 n 阶行列式的定义中，要用到 n 级排列的一些性质.

1.2.1 n 级排列的定义

由自然数 $1,2,\cdots,n$ ($n>1$)组成的一个无重复有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 为一个 n **级排列**.

例 1.2.1 由自然数 $1,2,3$ 可组成几级排列？分别是什么？

解： 可组成一个三级排列，它们是 123，132，213，231，312，321.

显然，三级排列共有 $3!=6$ 个，所以 n 级排列的总数为 $n!$ 个.

在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大数 i_s 排在较小数 i_t 之前，即 $i_s>i_t$，则称这一对数 i_si_t 构成一个**逆序**，一个排列中逆序的总数，称为它的**逆序数**，可表示为 $t(i_1i_2\cdots i_n)$.

例 1.2.2 求 $t(21534)$.

解： 在五级排列 21534 中，构成逆序数对的有 21,53,54，因此 $t(21534)=3$.

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数，则称它为**偶排列**；如果排列的逆序数为奇数，则称它为**奇排列**.

例 1.2.3 讨论排列 $123\cdots(n-1)n$ 和 $n(n-1)\cdots321$ 的奇偶性.

解： 易见 n 级排列 $123\cdots(n-1)n$ 中没有逆序，所以 $t(123\cdots(n-1)n)=0$，这是一个偶排列，故又称为**自然序排列**.

在 n 级排列 $n(n-1)\cdots321$ 中，只有逆序，没有顺序，故有

$$t(n(n-1)\cdots321)=0+1+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

可以看出，排列 $n(n-1)\cdots321$ 的奇偶性与 n 的取值有关，从而当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时这个排列为偶排列，否则为奇排列.

1.2.2　n 级排列的性质

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，交换任意两数 i_s 与 i_t 的位置，称为**对换**，记为 (i_s,i_t). 将相邻两个元素对换，称为**相邻对换**.

如 $(21534)\xrightarrow{(1,3)}(23514)$.

一般地，我们有以下结论.

定理 1　任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性.

证：先证相邻对换的情形.

设排列 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1,\cdots,a_l$；$b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a 与 b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$ 与 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$，把它做 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_mc_1\cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$. 总之，经过 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论　奇排列变成自然序排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然序排列的对换次数为偶数.

证：由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而自然序排列是偶排列（逆序数为 0），因此知推论成立.

定理 2　在全部 n 级排列 $(n\geqslant 2)$ 中，奇偶排列各占一半.

证：n 级排列的总数为 $n!$ 个，设奇排列数为 t，偶排列数为 s，则有 $t+s=n!$.

若将 t 个奇排列中数和相邻数对调一下，即变成了偶排列，那么就有 $s\geqslant t$，同样的做法就有 $t\geqslant s$，所以 $t=s$，即奇偶排列各占一半.

1.3　n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.3.1}$$

容易看出：

（i）式 (1.3.1) 等号右端的每一项恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列．因此式 (1.3.1) 等号右端任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$． 这里第一个下标（行标）排成标准次序 123，而第二个下标（列标）排成 $p_1p_2p_3$，它是 1、2、3 三个数的某个排列．这样的排列共有 6 种，对应式 (1.3.1) 等号右端共含 6 项．

（ii）各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的三项列标排列是：123,231,312；

带负号的三项列标排列是：132,213,321．

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列．因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数．

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

式中，t 为 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，Σ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和．

仿此，可以把行列式推广到一般情形．

1.3.1　n 阶行列式的定义

定义 1　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.3.2}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数．由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如式 (1.3.2) 的项共有 $n!$ 项．所以这 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 **n 阶行列式**，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记为 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

按此定义的二阶、三阶行列式，与 1.1 节中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆.

从上面的分析及定义，可得到 n 阶行列式的另一种定义形式.

定义 2　$D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^t a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$，即把列标排列写成标准排列，$j_1j_2\cdots j_n$ 为行标的一个 n 级排列.

由此，得到行列式更加一般的定义形式.

定义 3　$D=\sum(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)+t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{j_1p_1}a_{j_2p_2}\cdots a_{j_np_n}$，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为行标的一个 n 级排列，$p_1p_2\cdots p_n$ 为列标的一个 n 级排列.

例 1.3.1　四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 共有多少项？乘积 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 是 D 中的项吗？

解：共有 $4!=24$ 项. 乘积 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 不是 D 中的项，因为其中两个元素 a_{12}，a_{32} 均取自第二列.

例 1.3.2　已知 $D=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

解：由行列式的定义，展开式的一般项为 $(-1)^{t(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，要出现 x^3 的项，a_{ip_i} 需三项取到 x. 显然行列式中含 x^3 的项仅有两项，它们是 $(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 及 $(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$. 即 $x\cdot x\cdot x\cdot 1=x^3$ 及 $(-1)\cdot x\cdot x\cdot 1\cdot 2x=-2x^3$，故 x^3 的系数为 $1+(-2)=-1$.

1.3.2　特殊行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式.

1．对角行列式

称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为**对角行列式**. 根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2．上三角形行列式

称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为**上三角形行列式**．根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3．下三角形行列式

称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为**下三角形行列式**．根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4．副对角形行列式

称 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 为**副对角形行列式**．根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

1.4　行列式的性质

当行列式的阶数较高时，利用定义计算行列式相当麻烦，为了简化行列式的计算，需要研究行列式的一些性质.

1.4.1　行列式的性质

性质 1　将行列式的行、列互换，行列式的值不变．即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D^{\mathrm{T}}=D$．行列式 D^{T} 称为 D 的**转置行列式**.

由此性质可知，行列式中行与列的地位是对称的，也就是说，凡是行列式对行成立的性质，对列也是成立的.

性质 2　互换行列式的两行（列），行列式的值仅改变符号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i\leftrightarrow r_j}{=} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行， 以 c_i 表示行列式的第 i 列．交换 i, j 两行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$， 交换 i, j 两列记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

性质 3　以数 k 乘以行列式的某一行（列）中的所有元素，就等于用 k 乘此行列式．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 i 行（列）乘以 k，记为 $r_i \times k$（$c_i \times k$）.

由性质 3 可得下面的推论.

推论 2 行列式一行（列）的所有元素的公因子可以提取到行列式的外面.

推论 3 如果行列式中有一行（列）的元素全为零，则此行列式值为零.

性质 4 如果行列式中有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式值为零.

性质 5 如果行列式的某一行（列）的所有元素都是两个数的和，则此行列式等于两行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一常数后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变.

例如，以数 k 乘第 i 行加到第 j 行上，当 $i \neq j$ 时，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_j+k_j}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以数 k 乘第 i 行（列）加到第 j 行（列）上记为 $r_j + kr_i$ （$c_j + kc_i$）.

以上诸性质请读者证明之.

1.4.2 利用行列式的性质计算行列式

性质 2、3、6 介绍了行列式关于行和关于列的三种运算，即 $r_i \leftrightarrow r_j$ 、 $r_i \times k$ 、 $r_j + kr_i$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 、 $c_i \times k$ 、 $c_j + kc_i$，利用这些运算可简化行列式的计算，特别是利用运算 $r_j + kr_i$（或 $c_j + kc_i$）可以把行列式中许多元素化为零. 计算行列式常用的一种方法就是利用 $r_j + kr_i$（或 $c_j + kc_i$）把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1.4.1 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

解： $D\xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}}\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&10&-5&5\\0&16&-10&11\\0&21&-9&11\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&0&-2&3\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}(-5)\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&1&1&1\\0&0&-2&3\\0&2&-1&1\end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_4-2r_2}(-5)\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&1&1&1\\0&0&-2&3\\0&0&-3&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-\frac{3}{2}r_3}(-5)\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&1&1&1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-\frac{11}{2}\end{vmatrix}=-55$.

例 1.4.2　计算 $D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

解： $D_n\xlongequal{r_1+(r_2+\cdots+r_n)}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_n-ar_1]{\substack{r_2-ar_1\\ \cdots}}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$

$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

例 1.4.3　计算 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&1&0&\cdots&0\\3&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$.

解： $D_n\xlongequal[j=1,2,\cdots,n]{c_1-jc_j}\begin{vmatrix}1-(2^2+3^2+\cdots+n^2)&2&3&\cdots&n\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1-(2^2+3^2+\cdots+n^2)$.

例 1.4.4 求证：$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

证：
$$\begin{aligned}
\text{左式} &= \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= \text{右式}.
\end{aligned}$$

例 1.4.5 证明 $D = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$.

证：$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行倍加}} \begin{vmatrix} p_1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & p_m \end{vmatrix} = p_1 \cdots p_m$

$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{列倍加}} \begin{vmatrix} q_1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & q_n \end{vmatrix} = q_1 \cdots q_n$

$$D \xlongequal[\text{后}n\text{列“列倍加”}]{\text{前}m\text{行“行倍加”}} \left|\begin{array}{ccc|ccc} p_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & p_m & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & \cdots & * & q_1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & * & * & \cdots & q_n \end{array}\right| = (p_1 \cdots p_m)(q_1 \cdots q_n) = D_1 D_2 .$$

1.5　行列式按行（列）展开

上节介绍了利用行列式的性质来简化行列式的计算，本节将考虑如何把高阶行列式化为低阶行列式，由于二阶、三阶行列式可以直接计算，故这也是求行列式的有效途径．在这里我们先引进余子式和代数余子式的概念．

1.5.1　余子式和代数余子式

在n阶行列式中，将元素a_{ij}所在的第i行和第j列上的元素划去，其余元素按照原来的相对位置构成的$n-1$阶行列式，称为元素a_{ij}的**余子式**，记为M_{ij}．记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称A_{ij}为元素a_{ij}的**代数余子式**．

例 1.5.1　求行列式$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\0&1&2&4\\-3&5&0&0\\2&0&0&1\end{vmatrix}$中元素$a_{12},a_{34},a_{44}$的余子式和代数余子式．

解：$M_{12}=\begin{vmatrix}0&2&4\\-3&0&0\\2&0&1\end{vmatrix}=6$；$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-6$．

$$M_{34}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\2&0&0\end{vmatrix}=2;\ A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-2.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\-3&5&0\end{vmatrix}=-13;\ A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=-13.$$

1.5.2　行列式展开定理

引理　在n阶行列式D中，如果第i行元素仅$a_{ij}\neq 0$，其余的都为零，则这个行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积．即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证：先证$(i,j)=(1,1)$的情形，此时$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，这是例 1.4.5 中当$m=1$时的特殊情形，按例 1.4.5 的结论，即有

$$D = a_{11}M_{11}.$$

又 $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$，从而 $D = a_{11}A_{11}$.

再证一般情形，此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为了利用前面的结果，把 D 的行列做如下调换：把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行……第1行对调，这样数 a_{ij} 就调到了第 1 行第 j 列，调换的次数为 $i-1$. 再把第 j 列依次与第 $j-1$ 列、第 $j-2$ 列……第 1 列对调，这样数 a_{ij} 就调到了第 1 行第 1 列，调换的次数为 $j-1$. 总之，经过 $i+j-2$ 次调换，把 a_{ij} 就调到了第 1 行第 1 列，所得到的行列式 $D_1 = (-1)^{i+j-2}D = (-1)^{i+j}D$ ，而 D_1 中 $(1,1)$ 元的余子式就是 D 中 (i,j) 元的余子式 M_{ij} .

由于 D_1 中 $(1,1)$ 元为 a_{ij} ，第 1 行其余元素都为零，利用前面的结果，有 $D_1 = a_{ij}M_{ij}$ ，于是 $D = (-1)^{i+j}D_1 = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}$.

定理 1.5.1 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

证： $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据引理，即得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n) .$$

类似地，若按列证明，可得

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n) .$$

这个定理叫做**行列式按行（列）展开法则**．利用这一法则并结合行列式的性质，可以简化行列式的计算．

例 1.5.2　用展开法则再来计算例 1.4.1 的

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} .$$

解： 保留 a_{32} ，把第 2 列其余元素变为零，然后按第 2 列展开：

$$D \overset{r_1+5r_3}{\underset{r_4-r_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 16 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第2列展开}} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1+2r_2}{\underset{r_3-4r_2}{=\!=\!=}} (-1) \begin{vmatrix} 20 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第2列展开}} (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -55$$

例 1.5.3　计算 $D_{2n} = \left| \begin{array}{c|cccccc|c} a & & & & & & & b \\ \hline & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ \hline c & & & & & & & d \end{array} \right| \leftarrow$.

解： 将 D_{2n} 按第 1 行展开，则

$$D_{2n} = (-1)^{1+1} a \left| \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & D_{2(n-1)} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d \end{array} \right|_{(2n-1)} + (-1)^{1+2n} b \left| \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & D_{2(n-1)} & \\ 0 & & & \\ \hline c & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right|_{(2n-1)}$$

$$=(-1)^{(2n-1)+(2n-1)}ad\cdot D_{2(n-1)}+(-1)(-1)^{(2n-1)+1}bc\cdot D_{2(n-1)}$$

$$=(ad-bc)D_{2(n-1)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2$$

而 $D_2=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$，故 $D_{2n}=(ad-bc)^n$．

例 1.5.4 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 2 & & & \\ 1 & 0 & 3 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n\end{vmatrix}\leftarrow$．

解：将 D_n 按第 n 行展开，则

$$\begin{aligned}D_n&=nD_{n-1}+(-1)^{n+1}(n-1)!\\&=n\left[(n-1)D_{n-2}+(-1)^{(n-1)+1}(n-1-1)!\right]+(-1)^{n+1}(n-1)!\\&=n(n-1)D_{n-2}+(-1)^n\frac{n!}{n-1}+(-1)^{n+1}\frac{n!}{n}\\&=\cdots\\&=n(n-1)\cdots3\cdot D_2+(-1)^4\frac{n!}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n-1}+(-1)^{n+1}\frac{n!}{n}\end{aligned}$$

而 $D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-1=(-1)^2\cdot2+(-1)^3\cdot1$，故

$$D_n=(n!)\left[\frac{(-1)^2}{1}+\frac{(-1)^3}{2}+\frac{(-1)^4}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right].$$

例 1.5.5 证明范德蒙德（vandermonde）行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \tag{1.5.1}$$

其中记号“Π”表示全体同类因子的乘积．

证：用数学归纳法．因为